

橡胶中简单剪切与纯剪切的联系^{*}

罗 贤 光

(华南理工大学工程力学系, 广州, 510641)

摘 要

研究了简单剪切与纯剪切的联系, 得出了: (1) 简单剪切可看成纯剪切加转动, 转动角 θ 有 $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)$; (2) 若简单剪切椭圆的长轴与坐标轴 x 的夹角为 Φ , 相应的纯剪椭圆长轴与坐标轴 y 的夹角为 β_0 , 则 $\Phi = \beta_0$; (3) 橡胶在双向拉伸时剪应变 γ 的一般表达式为 $\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(2\lambda_1\lambda_2)} \sin 2t_0$, 对简单剪切而言即为 $\operatorname{tg}\gamma = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}$.

关键词 橡胶、简单剪切、纯剪、剪应变

1. 简单剪切椭圆的形成

当一微小六面体受到简单剪切时, 其形变可用(图1)表示. (图1a)为微小六面体的平面图形, (图1b)为六面体变形后的平面图形. 在(图1a)上作一圆定名基圆, 在圆上任取一点 M , 此点在(图1b)上则相应为 M'' 点. 根据简单剪切的定义, 点 M'' 对 oxy 坐标有

$$x = \overline{OM} \times \cos t + \frac{y}{\overline{OM}} \times u \quad (1)$$

$$Y = \overline{OM} \times \sin t \quad (2)$$

当取 $\overline{OM}$ 为一单位长时, 由式(1), (2)可得点 M'' 的轨迹为

$$(x - u \times y)^2 + y^2 = 1 \quad \text{即}$$

$$x^2 - 2u \times x \times y + (u^2 + 1)y^2 = 1 \quad (3)$$

将式(3)与 $A \times X^2 + B \times X \times Y + C \times Y^2 + L = 0$ 比较, 得 $A = 1$, $B = -2u$,

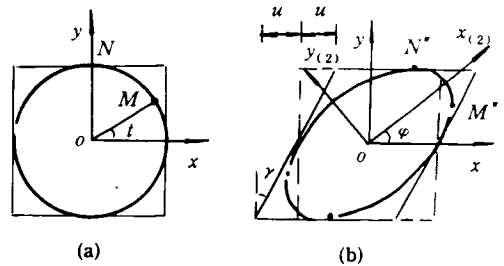


Fig.1 Simple shear: (a) the unstrained state
(b) the strained state

$$C = u^2 + 1, L = -1$$

计算 $\Delta = 4AC - B^2 = 4 > 0$ 且 $AC = u^2 + 1 > 0$, 故点 M'' 的轨迹按实椭圆求解. 下面求解:

(1) 由于 $B \neq 0$, 故需采用旋转坐标轴进行研究. 旋转坐标 $ox_{(2)}y_{(2)}$ 对原坐标 oxy 的转角 (图 1b) (图 2) 为

$$\operatorname{th} 2\Phi = \frac{B}{(A-C)} = \frac{2}{u} \quad (4)$$

(2) 根据求解椭圆的数学式有

$$A' + C' = A + C = 2 + u^2 \quad (5)$$

$$A' - C' = -\sqrt{(A-c)^2 + B^2} = -\sqrt{u^4 + 4u^2} \quad (6)$$

联立解式 (5)、(6) 有

$$A' = 0.5 \times [(2 + u^2) - \sqrt{u^4 + 4u^2}] \quad (7)$$

$$C' = 0.5 \times [(2 + u^2) + \sqrt{u^4 + 4u^2}] \quad (8)$$

于是可以得到点 M'' 的轨迹为

$$A' x_{(2)}^2 + C' y_{(2)}^2 = 1 \quad (9)$$

令

$$A' = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2, \quad C' = \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2$$

则有

$$\frac{X_{(2)}^2}{\lambda_1^2} + \frac{Y_{(2)}^2}{\lambda_2^2} = 1 \quad (10)$$

由式 (7)、(8) 可证 $A' \times C' = 1$, 于是有 $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$. 由此可知点 M'' 的轨迹是长半轴

为 λ_1 短半轴为 λ_2 , 且 $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ 的椭圆.

(3) 将式 (5) 改写成式

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \lambda_1^2 = 2 + u^2$$

可解出

$$u = \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{\lambda_1} \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (4) 得

$$\operatorname{tg} 2\Phi = \frac{2}{u} = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1^2 - 1)}$$

可得

$$\text{ctg } \Phi = \lambda_1 \tag{12}$$

式 (12) 为 Treloar 的结论^[1], Φ 角意义见式 (4) 及 (图 1)。

2. 纯剪椭圆的形成

如果在 (图 1a) 添加一坐标 $ox_{(1)}y_{(1)}$ (图 2), 沿着轴 $X_{(1)}$ 使试件产生拉伸 (或缩短), 拉伸比为 λ_1 , 沿轴 $y_{(1)}$ 产生拉伸 (或缩短), 拉伸比为 λ_2 (当 $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ 时即试件产生纯剪切)。此时, 基圆上的任一点 M 变成 M' , 点 M' 的坐标

$$x_{(1)} = \overline{OM} \times \cos \beta \times \lambda_1 = \lambda_1 \cos \beta \tag{13}$$

$$y_{(1)} = \overline{OM} \times \sin \beta \times \lambda_2 = \lambda_2 \sin \beta \tag{14}$$

由式 (13)、(14) 可得

$$\frac{x_{(1)}^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_{(1)}^2}{\lambda_2^2} = 1 \tag{15}$$

上式表示基圆变成椭圆, 当 $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ 即为纯剪椭圆。

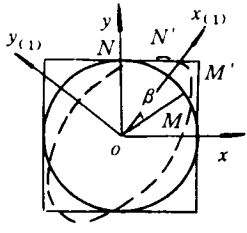


Fig.2 Pure shear

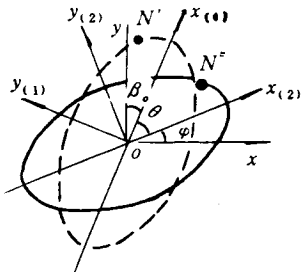


Fig.3 Angle θ of rotation

比较式 (10) 和式 (15), 当简单剪切的拉伸比 λ_1 相等于纯剪切的拉伸比 λ_1 时, 即两椭圆的长、短半轴——对应相等, 则两椭圆具有相同的形状. 比照 (图 1b) 和 (图 2), 两椭圆的不同点, 仅仅是坐标 $ox_{(2)}y_{(2)}$ 与坐标 $ox_{(1)}y_{(1)}$ 方位有差异, 由此可推想: 简单剪切可以看作纯剪加转动. 这是 Treloar 所提到的结论^[1].

3. 简单剪切可以看成纯剪加转动的进一步讨论

(图 3) 中的虚线椭圆表示 (图 2) 中的纯剪椭圆, 实线椭圆表示 (图 1b) 中的简单剪切椭圆. 点 N' 、 N'' 分别表示基圆上的顶点 N 在纯剪椭圆和简单剪切椭圆上的对应点. 如果我们能做到将虚线椭圆连同坐标 $ox_{(1)}y_{(1)}$ 进行旋转后, 恰能使坐标 $ox_{(1)}y_{(1)}$ 与 $ox_{(2)}y_{(2)}$ 重合, 虚、实线椭圆重合, 点 N' 、 N'' 重合, 则可得: 简单剪切可以看成纯剪加转动. 由于两椭圆的中心同为 O 点, 两椭圆的长半轴与短半轴也分别相等, 所以做到坐

标重合, 椭圆重合是无疑的, 下面主要是推求满足点 N' 与 N'' 重合的条件.

由式 (1)、(2) 可知点 N'' 对坐标 $ox_{(2)}y_{(2)}$ 有

$$X_{(2)} = x \cos \Phi + y \sin \Phi = u \cos \Phi + \sin \Phi = \frac{\lambda_1^2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \quad (16)$$

$$Y_{(2)} = y \cos \Phi - x \sin \Phi = \cos \Phi - u \sin \Phi = \frac{1}{\lambda_1 \times \sqrt{1 + \lambda_1^2}} \quad (17)$$

由式 (13)、(14) 可知点 N' 对坐标 $ox_{(1)}y_{(1)}$ 有

$$x_{(1)} = \lambda_1 \cos \beta_0 \quad (18)$$

$$y_{(1)} = \lambda_2 \sin \beta_0 \quad (19)$$

由于要求满足 $X_{(1)} = X_{(2)}$, $Y_{(1)} = Y_{(2)}$, 于是由式 (16)、(17)、(18)、(19) 求得 $\text{ctg} \beta_0 = \lambda_1$, 又因式 (12) $\text{ctg} \Phi = \lambda_1$, 故有

$$\beta_0 = \Phi \quad (20)$$

式 (20) 表示: 简单剪切可以看成 $\beta_0 = \Phi$ 的纯剪加转动.

下面说明二点:

(1) 转动角 θ (图 3) 为 $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta_0 - \Phi = \frac{\pi}{2} - 2\Phi$ 即

$$\text{tg} \theta = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (21)$$

上式中当 $\Phi = 45^\circ$, 也即 $\lambda_1 = 1$, $\theta = 0$, 纯剪切即可看成简单剪切, 材料力学讨论的小变形即是.

(2) 材料力学中, 简单剪切的剪应变, 一般是指 (图 1b) 中的 γ 角, 显然 $\text{tg} \gamma = \frac{u}{1}$

$= \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}$, 这就是 Treloar 所得出的简单剪切的剪应变公式^[1]. 这一公式还可以从下面的剪应变一般公式导出.

4 剪应变公式研究

橡胶力学中所讨论的问题, 大多可归之于平面问题. 本节主要通过双向拉伸的情形研究平面问题中的一般剪应变公式.

(图 4a) 表示边长为 1 单位长的立方体试件, 在外力作用下, 试件的边 $ab(cd)$ 变到 λ_1 单位长 (图 4b), 边 $aa'(bb')$ 变到 λ_3 单位长, 依照橡胶体积不变的性质, 边 $ac(bd)$ 为长 λ_2 , 则 $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3}$. (图 4c 和 d) 分别表示 (图 4a 和 b) 的平面图形.

在力学中为了研究物体某一点 P 发生的形变状态, 往往用一微小的正方体 (图 5a)

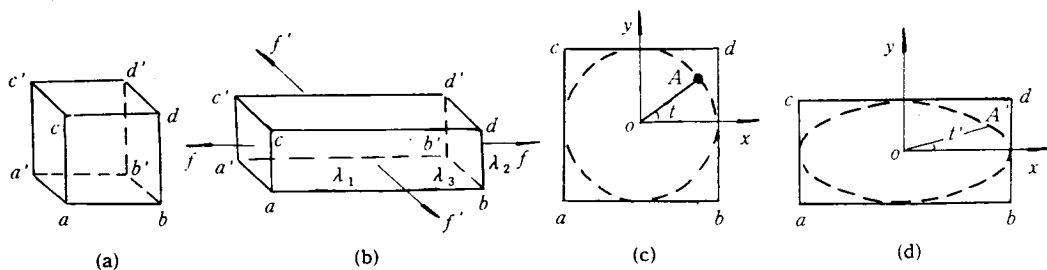


Fig.4 Types of strain
(a), (c) Unstrained state; (b), (d) Two-dimensional extension

表示这个点, 对平面问题, (图 5a) 可简化成 (图 5b). 物体在外力作用下发生变形, 微小的正六面体也发生变形. 它的变形之一是: 原来相互垂直的两根棱边的直角夹角发生变化 (图 5c), 这直角夹角的改变量 γ 称为剪应变^[2]. 下面, 讨论其表达式.

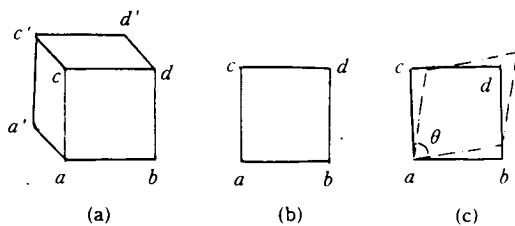


Fig.5 Shearing strain
(a), (b) The unstrained state, (c) The strained state

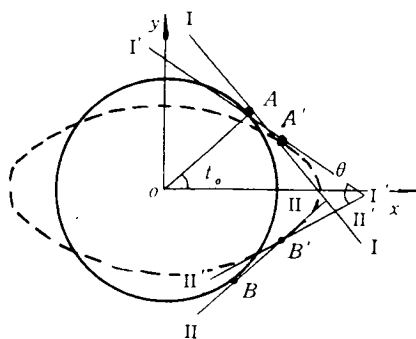


Fig.6 Analysis of shearing strain

首先将 (图 4c) 中的基圆与 (图 4d) 中的椭圆综合成 (图 6), 在 (图 6) 的基圆上任取一点 A , 作基圆的切线 $I-I'$, 然后垂直切线 $I-I'$, 作基圆的另一条切线 $II-II'$ (与基圆相切于 B 点), 则切线 $I-I'$ 与切线 $II-II'$ 可用来表示 (图 5c) 所示正六面体的两相互垂直的棱边线. 试件受力变形后, 基圆上的点 A 位移到 A' , 点 B 位移到 B' , 基圆变成了椭圆, 切线 $I-I'$ 变成切线 $I'-I'$, 切线 $II-II'$ 变成切线 $II'-II'$, 此时切线 $I'-I'$ 与切线 $II'-II'$ 表示了 (图 5c) 虚线所示的两根棱边线, 它们不互相垂直而成交角 θ , 根据剪应变定义, 剪应变 γ 为 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$, 下面首先求角 θ , 再求剪应变 γ .

根据式 (13)、(14), 椭圆上的任一点之切线斜率 K 为

$$k = \frac{dy_{(1)}}{dx_{(1)}} = - \frac{\lambda_2 \cos \beta}{\lambda_1 \sin \beta} \tag{22}$$

仿照上式讨论 (图 6) 中切线 $I'-I'$ 的斜率 $K_{I'}$, 则当角 t 表示连线 OA 与轴 x 的夹角, 且 $t = t_0$ 时则有

$$K_{I'} = -\frac{\lambda_2 \cos t_0}{\lambda_1 \sin t_0} \quad (23)$$

如讨论切线 II' - II' 的斜率 $K_{II'}$, 则角 t 为联线 OB 与轴 x 的夹角 (图 6 中未标出). 因联线 OB 与 OA 垂直, 可知联线 OB 与轴 x 的夹角应为: $-\left(\frac{\pi}{2} - t_0\right)$. 于是有

$$K_{II'} = \frac{-\lambda_2 \cos \left[-\left(\frac{\pi}{2} - t_0\right) \right]}{\lambda_1 \sin \left[-\left(\frac{\pi}{2} - t_0\right) \right]} = \frac{\lambda_2 \sin t_0}{\lambda_1 \cos t_0} \quad (24)$$

前面已述, 剪应变 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$, 故有 $\text{tg} \gamma = \text{ctg} \theta$, 即

$$\text{tg} \gamma = \text{ctg} \theta = \frac{(1 + k_{I'} \cdot k_{II'})}{(k_{II'} - k_{I'})} = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(2\lambda_1 \lambda_2)} \sin 2t_0 \quad (25)$$

在纯剪状态下, 因 $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, 于是式 (25) 变成

$$\text{tg} \gamma = \frac{(\lambda_1^4 - 1)}{(2\lambda_1^2)} \sin 2t_0 \quad (26)$$

根据式 (20), 可知与简单剪切相应的纯剪切有 $t_0 = \beta_0 = \Phi$ 的关系存在, 且 $\text{ctg} t_0 = \text{ctg} \Phi = \lambda_1$, 从而得

$$\sin 2t_0 = \frac{2\lambda_1}{(1 + \lambda_1^2)} \quad (27)$$

将式 (27) 代入 (26), 即可得出前述的 Treloar 所提出的简单剪切的剪应变公式

$$\text{tg} \gamma = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \quad (28)$$

参 考 文 献

- [1] Treloar, L., R. G. The Physics of Rubber Elasticity, Third Edition, 1975, 253—254
- [2] 徐芝纶, 弹性力学简明教程, 人民出版社, 1980 年, 7—8.

THE RELATION BETWEEN SIMPLE SHEAR AND PURE SHEAR IN RUBBER

LUO Xianguang

(Department of Engineering Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou, 510641)

ABSTRACT

This paper has investigated the relation between simple shear and pure shear in rubber, from which we conclude that:

(1) A simple shear was equivalent to a pure shear plus a rotation. The angle θ of rotation is given by $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right)$

(2) If Φ is the angle from the major axis in simple shear in rubber to the x -axis, β_0 is the angle from the major axis in pure shear in rubber to the y -axis, then $\Phi = \beta_0$.

(3) A general expression of the shear strain γ in two-dimensional extension in rubber is given by

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(2\lambda_1\lambda_2)} \sin 2t_0$$

In simple shear the resulting expression for γ is

$$\operatorname{tg}\gamma = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}$$

Key words Rubber, Simple shear, Pure shear, Shear strain